ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

HỨA THỊ THÙY BÔNG

ĐÁNH GIÁ SAI SỐ NỘI SUY VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 5/2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—————o0o—————

HỨA THỊ THÙY BÔNG

ĐÁNH GIÁ SAI SỐ NỘI SUY VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
TS. PHAN XUÂN THÀNH

THÁI NGUYÊN, 5/2019

Mục lục

Mở đầu

Việc nghiên cứu các quá trình tự nhiên thường dẫn đến các bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Giải số các bài toán đó là một yêu cầu quan trọng của thực tiễn. Một phương pháp hay dùng để giải số (giải gần đúng) phương trình đạo hàm riêng là phương pháp phần tử hữu hạn. Ý tưởng ở đây là xấp xỉ nghiệm trong không gian con hữu hạn chiều sinh bởi các hàm đa thức (tuyến tính, hoặc bậc cao) trên từng phần tử hữu hạn (trong đó, phần tử hữu hạn được hiểu là đoạn thẳng một chiều, tam giác hai chiều, hoặc tứ diện ba chiều).

Mục đích của luận văn là nghiên cứu việc xấp xỉ hàm số bằng hàm nội suy tuyến tính (hoặc hằng số, hoặc bậc hai) một chiều hoặc hai chiều và đánh giá sai số của phương pháp nội suy. Cụ thể chúng tôi đánh giá sai số nội suy trong các không gian hàm L_2 và W^1. Các hàm nội suy tuyến tính này được dùng để đánh giá sai số của phương pháp phần tử hữu hạn.

Nội dung chính của luận văn được trình bày trong ba chương, gồm:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2. Đánh giá sai số nội suy.

Chương 3. Đánh giá sai số của phương pháp phần tử hữu hạn.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Phan Xuân Thành. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy, người đã tận tình hướng dẫn tác giả trong quá trình nghiên cứu và viết bản luận văn này.

Tác giả chân thành cảm ơn Lãnh đạo trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán-Tin, cùng toàn thể các thầy cô trong trường đã giảng dạy và giúp đỡ cho tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K11 (khóa 2017-2019), bạn bè, đồng nghiệp và gia đình đã tạo điều kiện, động viên, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Thái Nguyên, ngày 11 tháng 5 năm 2019

Tác giả luận văn

Hứa Thị Thùy Bông

Bảng ký hiệu

$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$L_2(a,b)$	không gian các hàm bình phương khả tích trên (a,b)
$L_1^{loc}(\Omega)$	không gian các hàm khả tích địa phương trên Ω
$L_\infty(\Omega)$	không gian các hàm đo được và bị chặn hầu khắp nơi trên Ω
$W_m(\Omega)$	không gian Sobolev cấp m
$C_0^\infty(\Omega)$	không gian các hàm khả vi vô hạn lần và có giá compact trên Ω
$C(\overline{\Omega})$	không gian các hàm liên tục trên miền $\overline{\Omega}$
$C^m(\overline{\Omega})$	không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp m trên miền $\overline{\Omega}$
eoc	estimated order of convergence - ước lượng tốc độ hội tụ
$u_I(x)$	hàm nội suy (đa thức) của hàm $u(x)$
V_h	không gian con hữu hạn chiều của không gian Hilbert V
h	bước lưới (của phép chia miền)

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương này sẽ trình bày một số kiến thức cơ bản về các không gian, khái niệm đạo hàm suy rộng, không gian Sobolev và khái niệm hàm số nội suy. Nội dung chính của chương này được tham khảo từ các tài liệu [1, 3, 4].

1.1 Các không gian hàm

1.1.1 Không gian vectơ

Định nghĩa 1.1.1. Không gian vectơ V trên trường vô hướng K là một tập các đối tượng, mỗi đối tượng gọi là một vectơ, trong đó có xác định hai phép toán:

1) Phép cộng: ứng mỗi cặp phần tử x và y thuộc V có cách xác định một phần tử thuộc V, viết là $x + y$;

2) Phép nhân với vô hướng: ứng mỗi phần tử $x \in V$ và mỗi số $k \in K$ có cách xác định một phần tử thuộc V, viết là kx; sao cho 8 tính chất sau thỏa mãn:

1/ $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V;$

2/ $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V;$

3/ Tồn tại $\theta \in V$ sao cho $\theta + x = x + \theta = x, \quad \forall x \in V$.

Phần thử θ gọi là phần tử “trung hòa” hay phần tử “không” của V;

4/ Với mỗi $x \in V$ tồn tại $-x \in V$ sao cho $x + (-x) = -x + x = \theta$.

Phần tử $-x$ gọi là phần tử “đối” của x;

5/ $k(x + y) = kx + ky, \quad \forall x, y \in V, \quad \forall k \in K$;

6/ $(k + l)x = kx + lx \quad \forall x \in V, \quad \forall k, l \in K$;

7/ $k(lx) = (kl)x \quad \forall x \in V, \quad \forall k, l \in K$;

8/ $1x = x, \quad \forall x \in V$.

Tám tính chất trên gọi là tám tiên đề của không gian vectơ.

Chú ý 1.1.2. Sau này thường ta chỉ xét trường hợp K là trường số thực $\mathbb{R}$.

1.1.2 Không gian chuẩn

Định nghĩa 1.1.3. Không gian chuẩn, còn gọi là không gian định chuẩn, là một không gian vectơ V trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in V$ có cách xác định một số thực ký hiệu là $\|x\|$ và gọi là chuẩn của x, thỏa mãn ba tính chất:

1/ $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2/ $\|kx\| = |k|.\|x\|, \quad \forall x \in V, \quad \forall k \in K$;

3/ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V$.

Ba tính chất trên gọi là ba tiên đề của chuẩn vectơ hay của không gian chuẩn.

Tập các phần tử của không gian vectơ V gọi là *tập nền* của không gian chuẩn V.

Sự hội tụ. Trong không gian chuẩn V xét dãy phần tử $\{x_n\}$. Nói dãy x_n *hội tụ* tới $x \in V$ (hay có giới hạn là $x \in V$) nếu dãy số $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ khi $n \longrightarrow \infty$, tức là

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N : n > N \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Khi đó ta viết $x_n \longrightarrow x$ khi $n \longrightarrow \infty$ hay đơn giản là $x_n \longrightarrow x$.
Nói *dãy x_n hội tụ trong V* hay *dãy x_n hội tụ* nếu tồn tại $x \in V$ để $x_n \longrightarrow x$.

1.1.3 Không gian Banach

Cho V là một không gian chuẩn. Xét dãy $\{x_n\} \in V$.

Định nghĩa 1.1.4. *Ta nói dãy x_n là dãy Cauchy nếu với bất kỳ số $\epsilon > 0$ cho trước nào cũng tồn tại số nguyên dương N tương ứng để*

$$n, m > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Dãy Cauchy có các tính chất sau:
Mọi dãy Cauchy không có quá một giới hạn.
Thực vậy, giả sử $\{x_n\} \in V$ có hai giới hạn là a và b với $a \neq b$, nghĩa là $\|b - a\| > 0$. Khi đó với $\epsilon = \|b - a\|/4$ sẽ tồn tại số nguyên $N > 0$ sao cho khi $n > N$ thì

$$\|x_n - a\| < \frac{\|b - a\|}{4}, \quad \|x_n - b\| < \frac{\|b - a\|}{4}.$$

Từ đó và vì $b - a = (x_n - a) - (x_n - b)$ ta suy ra

$$\begin{aligned} \|b - a\| <& \|x_n - a\| + \|x_n - b\| < \frac{\|b - a\|}{4} + \frac{\|b - a\|}{4} = \frac{\|b - a\|}{2} \\ &\Rightarrow \frac{\|b - a\|}{2} < 0 \Rightarrow \|b - a\| < 0. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\|b - a\| > 0$. Vậy không thể có $b \neq a$, nghĩa là dãy Cauchy chỉ có thể có một giới hạn.